

國立臺中教育大學 98 學年度大學日間部轉學招生考試

微積分 試題

適用學系：數學教育學系 二年級

一、填充題 (40%，每格 4%)

1. 求曲線  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 13$  在點  $(8, 27)$  之法線方程式 ( )

2. 設  $f(x)$  為一函數且  $f(x) = \sin x + \cos x + 1$ ，則  $f(x)$  之極大值與極小值之和為 ( )

3. 設  $g(x)$  為一函數且  $g(x) = \int_{-x^2}^x \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right) dt$ ，求  $g'(x) =$  ( )

4. 設  $F(x, y) = f(x+4y) + g(x-4y)$ ，求  $\frac{F_{xx}}{F_{yy}} =$  ( )

5. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^n \frac{n}{(n+t)(5n+t)} =$  ( )

6. Evaluate  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|2x-1| - |2x+1|}{x} =$  ( )

7. If  $x^3 + y^3 = 6xy$ , find  $\frac{dy}{dx} =$  ( )

8. Find the point  $(a, b)$  on the parabola  $y^2 = 2x$  that is closest to the point  $(1, 4)$ .  $(a, b) =$  ( )

9. Evaluate the improper integral  $\int_{-\infty}^0 xe^x dx =$  ( )

10. The interval of convergence of the series  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^n}{n 2^n}$  is ( )

【背面尚有試題】

二、計算及證明題 (60%, 每題 10%)

1. 求出下列冪級數的收斂集

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x-3)^n}{\sqrt{n} \cdot 4^n}$$

$$(2) \frac{x}{2^2-1} + \frac{x^2}{3^2-1} + \frac{x^3}{4^2-1} + \dots$$

$$2. \text{ For } n=0,1,2,\dots, f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases} .$$

(1) Find  $n$  so that  $f_n(x)$  is continuous at  $x=0$ .

(2) Find  $n$  so that  $f_n(x)$  is differentiable at  $x=0$ .

$$3. \text{ Prove } \tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

$$4. \text{ Differentiate } \sqrt{1+\sqrt[3]{x}} .$$

5. Prove that the function  $|x|$  is not differentiable at  $x=0$ , but  $|x|^2$  is differentiable at  $x=0$ .

6. Find the value of  $c$  which minimizes the maximum of the function

$$f(x) = |x^2 + c| \text{ on the interval } [-1,1].$$

國立臺中教育大學 98 學年度大學日間部轉學招生考試

微積分 試題

適用學系：數學教育學系 三年級

一、填充題 (40%，每格 4%)

1. 求  $\lim_{t \rightarrow \infty} (te^{-t^2} \int_0^t e^{x^2} dx) = ( \quad )$
2. 設曲線  $y = \ln(\cos x)$ ，則  $y$  在  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$  之弧長 =  $( \quad )$
3. 由曲線  $x = \sqrt{y}$  及  $x = \frac{y^3}{32}$  所圍成的區域  $R$ ，繞  $x$  軸旋轉所產生的立體體積為  $K$ ，將  $K$  四捨五入至整數位，其值為  $( \quad )$
4. 求  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x (\sin^2 x + 1)^2} dx = ( \quad )$
5. Evaluate  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}} \right) = ( \quad )$ .
6. Let  $f(x) = x^{\sin x}$ . Then  $f'(x) = ( \quad )$ .
7. If  $x^4 + y^4 = 16$ , find  $\frac{d^2y}{dx^2} = ( \quad )$ .
8. Evaluate the indefinite integral  $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} dx = ( \quad )$ .
9. The interval of convergence of the series  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$  is  $( \quad )$ .
10. The saddle points of  $f(x, y) = (1 + xy)(x + y)$  are  $( \quad )$ .

二、計算及證明題 (60%，每題 10%)

1. 在極座標上求出：

(1)  $r = 3 + 3\cos\theta$  內部與  $r = 3 + 3\sin\theta$  外部所圍成的區域面積

(2)  $r = 4 - 3\cos\theta$  在  $\theta = \frac{\pi}{3}$  時切線的斜率

【背面尚有試題】

2. 證明下列級數的斂散性

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n}{n!} \quad (2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

3. Prove that the series  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln x)^p}$  is convergent if  $p > 1$  and divergent if  $p \leq 1$ .

4. Find  $\int_0^1 \frac{x^{2e-1} - x^{e-1}}{\ln x} dx$  .

5. Prove  $\frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$  .

6. Find the area of the surface generated by revolving the curve  $x = t^3$ ,  $y = 1.5t^2$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) about  $x$ -axis .