國立台中教育大學 95 學年度大學日間部轉學招生考試

微積分 試題

適用學系：數教系

一、 選擇題：(10 題，每題 4 分，共 40 分。)

1.設 $f(x)=\begin{cases}2x^3+ax^2 & , x\ge 2\\ 4ax^2+bx & , x<2\end{cases}$ 對所有 x 值皆可微分，則 $(a,b)=$？

(A) $(2,1)$ (B) $(\frac{3}{2},3)$ (C) $(\frac{8}{3},-8)$ (D) $(3,-5)$ 。

2.若二次函數 $f(x)=2ax^2-bx+4c$ 滿足 $f'(2)=f(2)=0$ 且 $f(1)=1$，則 $f'(4)=$ ？

(A) 1 (B) -1 (C) -4 (D) 4 。

3.設 $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$ 在區間 $(-4,2)$ 的相對極大值為 m，相對極小值為 n，則 $m-n=$ (A) 16 (B) 32 (C) 40 (D) 56 。

4.求定積分 $\int_1^4 \frac{x^3-4}{x^2\sqrt{x}}dx=$？ (A) $\frac{39}{8}$ (B) $-\frac{9}{8}$ (C) $\frac{7}{3}$ (D) $\frac{15}{8}$ 。

5.由曲線 $y=e^x$ 與三直線 $x=0$、$x=9$、$y=0$ 所圍成之區域繞 x 軸旋轉一周所得之立體體積為 (A) $\pi(e^9-1)$ (B) πe^{27} (C) $\frac{\pi}{2}(e^{18}-1)$ (D) $\frac{\pi}{2}(e^9-1)$

6.級數：(a) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}$ (b) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$ (c) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}$ (d) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2i}$

請問級數中收斂的有幾個(A)1 (B)2 (C)3 (D)4。

7.計算級數 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}$ 的近似值：(A)1.7 (B)2.7 (C)3.1 (D) ∞。

8.計算級數 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 的近似值：(A)1.6 (B)2.7 (C)3.1 (D) ∞。

9.計算級數 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(i+1)}}{i}$ 的近似值：(A)0.7 (B)1.7 (C)2.1 (D) ∞。

10.已知(a) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^i}{i!}$ (b) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^i}{i!}$ (c) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{i^2+7i-1}}$ (d) $\int_0^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$

判斷上列之值，其值有限的有幾個(A)1 (B)2 (C)3 (D)4。

二、 計算及證明題：（6 題，每題 10 分，共 60 分。）

1. $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)})=$ ？

2. 求 $\int x^2 e^{3x^3+1}dx=$ ？

3. 請利用微積分的概念證明「在周長為 S 的所有矩形中，邊長為 S/4 的正方形面積最大」。

4. 請利用微積分的概念導出「高為 h 且底是邊長為 a 的正方形之正角錐的體積公式」。

5. One set of parametric equations for an ellipse is

$$x=f(t)=a\sin(t),\quad y=g(t)=b\cos(t)$$

where $0<a<b$ (so the ellipse is stretched in the y-direction). Find the curvature as a function of t and show that the curvature is largest at the narrow end of the ellipse where the curve crosses the y-axis.

6. Show that any function of the form

$$z=f(x+at)+g(x-at)$$

is a solution of the wave equation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$