

96 學年度數學教育系插班考試微積分試題

一、選擇題 (每題 8%)

1、若 $f(x)$ 為一個在開區間 (b, a) 可微之函數，則 $(f(a)-f(b))$ 與 $(a-b)$ 相除所得之值為 k ，我們通稱 k 的內涵為 (1) 瞬間速率 (2) 割線的斜率 (3) 瞬間加速度 (4) 導數。 ANS: ②

2、級數: (a) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}$ (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ (c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ (d) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i}$ ，請問級數中收斂的有幾個 (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4。 ANS: ②

3、利用黎曼積分的概念，計算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ ，當 $n \rightarrow \infty$ ，四捨五入取整數之值為，(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) ∞ 。 ANS: ①

4、若函數 $h(x) = \ln(x)$ ，其中 $\ln(x)$ 為自然對數，則計算函數 $h(x)$ 、 x 軸、 $x=1$ 及 $x=2$ 所圍成圖形之面積為 k ，四捨五入取整數之值為，(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3。 ANS: ①

ANS: : ①

二、計算與證明

1、求出下列各題的收斂區間為何? (16%)

$$(1) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} \left(\frac{x}{4} - 1\right)^k$$

$$(2) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{4x+3}{5}\right)^k \quad \text{ANS:} \cdot (1) [0, 8) \quad (2) \left(-2, \frac{1}{2}\right)$$

2、設 $g(x) = (x^4 + 3)/6x$ ，試求出下列各題 (18%)

(1) $g(x)$ 在 $x=1$ 與 $x=3$ 之間的曲線長

(2) $g(x)$ 與 $x=1$ 、 $x=3$ 以及 x 軸所圍成的區域，繞 x 軸旋轉 360 度所形成的

旋轉體體積 ANS: (1) $\frac{14}{3}$ (2) $10\frac{72}{252}\pi$

3、 $y = \int_1^{x^2+1} \frac{1}{t} dt$ ，求出 $y' = ?$ (16%) ANS: $\frac{2x}{x^2+1}$,

4、有一個倒立的圓錐形大桶底部之圓半徑為 3m，高 6 m，將水以 $2\text{m}^3/\text{min}$ 的速度打入桶中，請問在水深為 3 公尺時，桶中水面上升的變化率? (18%)

ANS: $\frac{8}{27\pi} \text{m/min}$

國立台中師範學院九十六學年度大學日間班轉學招生考試命題用紙

一、單選題 (32%)

(D) 1. 試求行列式
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ -1 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
 之值 (A)0 (B)1 (C)10 (D)13。

(D) 2. 試求方陣
$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$
 之特徵值 2 的代數重複度 (algebraic multiplicity)
(A)1 (B)2 (C)3 (D)4。

(B) 3. 試求方陣
$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$
 之特徵值 2 的幾何重複度 (geometric multiplicity)
(A)1 (B)2 (C)3 (D)4。

(C) 4. 假設 A 為 2×2 方陣，若 $|A| = -1$ ， $\text{tr}(A) = 1$ ，試求方陣 A 之特徵方程式
(A) $t^2 - t + 1$ (B) $t^2 + t + 1$ (C) $t^2 - t - 1$ (D) $t^2 + t - 1$

二、計算、判斷與證明

1、Find the general solution of the following system of equations. (17%)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{solution: } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2、Let $B = \{1 + 2x, x - x^2, x + x^2\}$ (18%)

(1) Show that B is a basis for P_2

(2) Let $p(x) = 1 + 3x + x^2$. Compute $[p(x)]_B$

(1) ANS: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$ is a basis for \mathbb{R}^3

$B = \{1+2x, x-x^2, x+x^2\}$ is a basis for P_2

(2) ANS: $[p(x)]_B = [1 \ 0 \ 1]$

3、決定下列敘述的真或不真？為真，簡單說明理由，不真則舉反例。並請以符號 T 代表真，F 代表不真填入前面之線上。(15%) ANS: F、F、T

____ (a). 空間上任兩向量的外積是一個常數。

理由或舉反例：

____ (b). 一次方程式其幾何圖形必為直線。

理由或舉反例：

____ (c). 空間上的直線方程式是一次方程式。

理由或舉反例：

4、決定下列敘述的真或不真？為真，簡單說明理由，不真則舉反例。並請以符號 T 代表真，F 代表不真填入前面之線上。(18%) ANS: T、T、F

____ (1). 若 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 為線性獨立，則 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 是 \mathbb{R}^4 的基底， $u_i \in \mathbb{R}^4, 1 \leq i \leq 4$ 。

理由或舉反例：

____ (2). 若 $v_i = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}\}$ 則 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 必線性相依。

理由或舉反例：

____ (3). 若 $\text{Span}\{w_1, w_2, w_3, w_4\} = W = \text{Span}\{w_1, w_2, w_3\}$ 則 $\{w_1, w_2, w_3\}$ 必線性獨立。

理由或舉反例：